امتحان مقرر المعادلات التفاضلية (1)

للسنة الثانية رياضيات الفصل الدراسي الأول

لعام2016-2017م.

الاسم

المدة : ساعة ونصف

الدرجة : (100)

قسم الرياضيات

السؤال الأول (20) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\acute{y}x^3 \sin y = x\acute{y} - 2y$$

السؤال الثاني (20) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y + x\acute{y} = y \ln \frac{y}{x} .$$

السؤال الثالث (20):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0 .$$

السؤال الرابع (20):

جد الحل العام وسيطياً للمعادلة التفاضلية التالية :

$$x = \tan^{-1}\acute{y} + \frac{\acute{y}}{1+\acute{y}^2} .$$

السؤال الخامس (20):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية :

$$y(y-1)\acute{\acute{y}} + \acute{y}^2 = 0 .$$

د. ميسون زين الدين

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتوفيق

حمص 2017\1\29 م

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية (1)
للسنة الثانية رياضيات الفصل الدراسي
الأول لعام ٢٠١٦/٢٠١٧

جواب السؤال الأول: (20د)

$$y' x^3 \sin y = x y' - 2y$$

تكتب المعادلة بالشكل:

١ $\frac{dx}{dy} = \frac{x^3 \sin y - x}{-2y} \Rightarrow$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y} x = -\frac{\sin y}{2y} x^3 \quad (1)$$

هي معادلة برنولي في x الدالة و y المتحول المستقل:

نقسم على x^3

$$\frac{x'}{x^3} - \frac{1}{2y}\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y} \quad (2)$$

نفرض:

١٠ $-\frac{z'}{2} = \frac{x'}{x^3} \Leftarrow z' = -\frac{2xx'}{x^4} = -\frac{2x'}{x^3} \Leftarrow z = \frac{1}{x^2}$

نعوض في (2) نجد:

$$-\frac{z'}{2} - \frac{1}{2y} z = -\frac{\sin y}{2y} \Rightarrow$$

$$z' + \frac{1}{y} z = \frac{\sin y}{y} \quad (3)$$

معادلة خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى:

$$y z' + z = \sin y$$

$$(yz)' = \sin y$$

$$yz = \int \sin y \, dy = -\cos y + c \Rightarrow$$

١٠ $z = \frac{c - \cos y}{y} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y = x^2 (c - \cos y)$

جواب السؤال الثاني: (20د)

$$y + x y' = y \ln \frac{y}{x}$$

نحل بالنسبة لـ y' نجد:

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} =$$

$$= \frac{y}{x}\left(\ln \frac{y}{x} - 1\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

المعادلة متجانسة في x و y لذا نفرض $\frac{y}{x} = z \Leftarrow y = x\cdot z$

$\Rightarrow y' = z + xz'$

نعوض في المعادلة :

(10) $z + xz' = z(\ln z - 1) \Rightarrow xz' = z\ln z - 2z \Rightarrow$

$$\frac{dz}{z(\ln z - 2)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z(\ln z - 2)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$\ln|\ln z - 2| = \ln|x| + \ln c = \ln cx \Rightarrow \ln z - 2 = cx$

(10) $\Rightarrow z = e^{cx+2} \Rightarrow y = x\, e^{cx+2} = x e^2 e^{cx}.$

جواب السؤال الثالث :(20)

$$(e^x + y + \sin y)\,dx + (e^y + x + x\cos y)\,dy = 0$$

(P) (Q)

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y \quad , \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

المعادلة تامة نجد الحل العام :

بتطبيق القانون :

(10) $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = c$

$$F(x,y) = \int_0^x (e^x + y + \sin y)\,dx + \int_0^y e^y\,dy = c$$

$$= [\,e^x + xy + x\sin y\,]_0^x + e^y\,]_0^y = c$$

(10) $F(x,y) = e^x + xy + x\sin y + e^y = c_1 \quad ; c_1 = c \cdot 2$

جواب السؤال الرابع :(20)

$$x = \tan^{-1} y' + \frac{y'}{1 + y'^2}$$

نفرض $y' = p$ والمعادلة محلولة بالنسبة لـ x :

$$x = \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p^2}$$

نشتقه بالنسبة لـ y :

(10) $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dy} + \frac{1-p^2}{(1+p^2)^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{(1+p^2)^2}\frac{dp}{dy} \Rightarrow \int dy = \int \frac{2p\,dp}{(1+p^2)^2}$$

بالمكاملة :

والحل العام وسيطياً :

(10) $$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{1+p^2} + c \\ x = \tan^{-1} p + \dfrac{p}{1+p^2} \end{cases}$$

جواب السؤال الخامس : (20)

$$y(y-1)\,y'' + y'^2 = 0$$

نفرض $y' = p$ نجد $y'' = p\frac{dp}{dy}$ معادلة لا تحوي x ظاهرياً :

$$y(y-1)\,p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

إما $p = 0 \Leftarrow y = a$ حيث a ثابت حلول شاذة للمعادلة وبالقسمة على $p \neq 0$ نجد : (10)

$$\int \frac{dp}{p} - \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} = 0$$

وبالمكاملة : $c_1 p = \frac{y}{y-1}$ نعوض عن p بـ y' نجد :

(10) $$x = \int \frac{dy}{p} = c_1 \int \frac{y-1}{y}\,dy = c_1(y - \ln|y|) + c_2$$
